GK-Doktorandenworkshop 10.–12. Dez. 2012

INVERSES GRUPPENPUZZLE

(Erweiterte) Eichtheorien

Hermann Weyl 1920: WW ändert sich nicht, wenn eine bestimmte Größe lokal frei gewählt wird.

↳ Eine Größe kann an jedem Ort unabhängig festgelegt werden (geeicht).

Elektrodynamik: $A^\mu(x) \to A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu \lambda(x)$

Feldgleichungen bleiben invariant:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

$$\hookrightarrow \partial^\mu A^\nu_{(x)} + \partial^\mu \partial^\nu \lambda(x) - \partial^\nu A^\mu_{(x)} - \partial^\nu \partial^\mu \lambda(x)$$

$\lambda(x)$ 2x partiell stetig diff-bar: $\partial^\mu \partial^\nu \lambda(x) = \partial^\nu \partial^\mu \lambda(x)$

Materiefelder: $\psi(x) \to \psi'(x) = e^{i\alpha(x)} \psi(x)$

$$\hookrightarrow \bar\psi \not\partial \psi \to \bar\psi \not\partial \psi + \underbrace{i(\partial_\mu \alpha(x))}_{?} \bar\psi \gamma^\mu \psi$$

$$\not\partial \to \not D = \not\partial + iq \not A \xrightarrow{\text{Eichtrafo}} \not\partial + iq \not A + iq \not\partial \lambda$$

Eichinvariante Größe:

$$\bar\psi \not{D} \psi \longrightarrow \bar\psi e^{-i\alpha(x)}\left(\not\partial + iq\not{A} + iq\not\partial\lambda\right)e^{i\alpha(x)}\psi$$

$$= \bar\psi \underbrace{e^{-i\alpha(x)}\partial_\mu(i\alpha(x))e^{i\alpha(x)}\gamma^\mu}_{i\not\partial\alpha(x)}\psi + \bar\psi\underbrace{e^{-i\alpha(x)}e^{i\alpha(x)}}_{1}\not\partial\psi$$

$$+ \bar\psi\underbrace{e^{-i\alpha(x)}e^{i\alpha(x)}}_{1} iq\not{A}\psi + \bar\psi\underbrace{e^{-i\alpha(x)}e^{i\alpha(x)}}_{1} iq(\not\partial\lambda)\psi$$

$$= \bar\psi\underbrace{\left(\not\partial + iq\not{A}\right)}_{\not{D}}\psi + \bar\psi\underbrace{\left(i\not\partial\alpha(x) + iq\not\partial\lambda\right)}_{\overset{!}{=}0}\psi$$

↳ wähle $\not\partial\alpha(x) = -q\not\partial\lambda(x)$

U(1)-Eichtransformationen: $A^\mu(x) \to A^\mu(x) + \partial^\mu\lambda(x)$

$$\psi(x) \to e^{-iq\lambda(x)}\psi(x)$$

<u>Nicht-abelsche Eichtheorien:</u> abelsch: $\psi(x) \to \underbrace{U(x)}_{\exp(iq\alpha(x))}\psi(x)$

nicht-abelsch (z.B. SU(N)): Fermionen in Darstellung R der Gruppe

$$\psi \to \psi^i, \quad i = 1, 2, \dots, \dim(R)$$

$$\psi^i(x) \to (U_R)^i{}_j(x)\psi^j(x) \quad \text{mit } U_R(x) = \exp\left(ig\theta^a(x)T^a_R\right)$$

T^a_R: Generatoren der Eichgruppe in Darstellung R

$\theta^a(x)$: Transformationsparameter, $g = \text{const.}$

Eichkovariante Ableitung: $D_\mu \Psi = \left(\partial_\mu - igA_\mu^a T_R^a\right)\Psi$ ③

Nebenbemerkung: Eichfelder transformieren sich als

$$A_\mu \to U A_\mu U^+ - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^+ \quad , A_\mu = A_\mu^a T^a$$

(wie im abelschen Fall $\hookrightarrow$ mit $\frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^+ = \partial_\mu \lambda(x)$)

infinitesimal: $U(x) = 1 + ig\,\theta^a(x)\,T_R^a + \mathcal{O}(\theta^2)$

$$A_\mu \to \left(1 + ig\,\theta^a T_R^a\right) A_\mu^b T_R^b \left(1 - ig\,\theta^c T_R^c\right)$$

$$- \frac{i}{g}\left(ig\,\partial_\mu \theta^a(x)\, T_R^a\right) + \mathcal{O}(\theta^2)$$

$$= A_\mu^a T_R^a + ig\,\theta^a \underbrace{[T_R^a, T_R^b]}_{if^{abc}T_R^c} A_R^b + \partial_\mu \theta^a T_R^a + \mathcal{O}(\theta^2)$$

$$= \left(A_\mu^a + \partial_\mu \theta^a - g f^{abc}\theta^b A_\mu^c\right) T_R^a$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{ig}[D_\mu, D_\nu]$$

Standardmodell

3 Wechselwirkungen $\Leftrightarrow$ 3 Eichgruppen

$$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$$

Pauli-Matrizen

$$\bar{\psi} \not{D} \psi = \bar{\psi} \gamma_\mu \left(\partial^\mu - i \frac{g_s}{2} \lambda^a G^{\mu,a} - i \frac{g}{2} \vec{\tau} \cdot \vec{W}^\mu - i \frac{g'}{2} Y B^\mu \right)$$

Gell-Mann-Matrizen

Hyperladung

el. Ladung: $Q = T_{3W} + \frac{Y}{2}$

Feldinhalt:	Darstellung in Gsm	Qel
$Q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	$(\underline{3}, \underline{2}, \frac{1}{3})$	$\begin{pmatrix} +2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$
u_R	$(\underline{3}, \underline{1}, \frac{4}{3})$	$+2/3$
d_R	$(\underline{3}, \underline{1}, -\frac{2}{3})$	$-1/3$
$L_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$	$(\underline{1}, \underline{2}, -1)$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
(ν_R	$(\underline{1}, \underline{1}, 0)$	0)
e_R	$(\underline{1}, \underline{1}, -2)$	-1
$G^{\mu a}$	$(\underline{8}, \underline{1}, 0)$	0
$W^{\mu i}$	$(\underline{1}, \underline{3}, 0)$	$\pm 1, 0$
B^μ	$(\underline{1}, \underline{1}, 0)$	0
Φ	$(\underline{1}, \underline{2}, 1)$	$(+1, 0)$

(Große) Vereinheitlichung?

↳ Suche Gruppe, die GSM umfasst

SM: 4 diagonale Generatoren: $\lambda^3, \lambda^8, T_3, Y$

(„Rang 4") ↳ jede erweiterte Eichgruppe muss mindestens genauso viele haben!

Rang 4 - Gruppen: $[SU(2)]^4$, $[O(5)]^2$, $[SU(3)]^2$,

$[G_2]^2$, $O(8)$, $O(9)$, $Sp(8)$, F_4,

$SU(5)$

enthalten keine SU(3) - Untergruppe

komplexe Darstellungen

enthält SU(3) aber $SU(2) \times U(1) \subset SU(3)$
↳ Ladungsoperator spurlos
↳ Summe der Quarkmassen wäre Null

Oder Erweiterungen mit Rang > 4 ⇒ $SO(10) \supset SU(5) \times U(1)$

Spinordarstellung der SO(10): $\underline{32} = \underline{16} \oplus \overline{\underline{16}}$

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}, \quad \psi_\pm = P_\pm \psi$$

Bemerkenswerte Feststellung: Standardmodell enthält genau 15 linkshändige Fermionen (je Generation)
16. Komponente ist SM - Singlet ↳ $(\nu_R)^c$

16 ? 3 uptype quarks (r, g, b)
3 downtype quarks (r, g, b)
2 leptons ($SU(2)_L$-doublet: e_L, ν_L) $\Big\} \times 2$ (c.c. rh. ferm.)

$SO(10) \to$ Pati-Salam: $SU(4)_C \times SU(2)_R \times SU(2)_L$

$\{10\} \to (6,1,1) + (1,2,2)$ (Higgs)

$\{16\} \to (4,1,2) + (\bar{4},2,1)$ (Fermionen)

$\{45\} \to \underbrace{(1,3,1)}_{W_R} + \underbrace{(1,1,3)}_{W_L} + \underbrace{(15,1,1)}_{G^a \text{ enthält 8 Gluonen}} + (6,2,2)$ (E7)

$\{126\} \to \underbrace{(10,1,3), (\overline{10},3,1)}_{\text{LR-brechende Tripletts}} + (15,2,2) + (6,1,1)$

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = (\underline{16}_i Y^{10}_{ij} \underline{16}_j)\, \underline{10}_H + \underbrace{(\underline{16}_i Y^{126}_{ij} \underline{16}_j)\, \overline{\underline{126}}_H}_{\text{Majorana-Massen f. Neutrinos}}$$

$$\underline{16} \otimes \underline{16} = \underline{10}_s \oplus \underline{120}_a \oplus \underline{126}_s$$

antisymmetrisch $\to Y_{120} = -Y_{120}^T$

Vgl. m. SU(5): N^2-1 Generatoren: 24 ($\to$ 24 Eichbosonen)

$$\underline{24} = \underbrace{(8,1)_0}_{\text{Gluonen}} + \underbrace{(1,3)_0}_{W_L} + \underbrace{(1,1)_0}_{B_Y} + \underbrace{(3,2)_{-5/6} + (\bar{3},2)_{5/6}}_{\text{"Leptoquarks"}}$$

$(SU(3)_c, SU(2)_L)_Y$